『総合政策論叢』第43号（2022年３月）
島根県立大学　総合政策学会

［研究ノート］

油分け問題の由来と解法の進化における文化的意義に関する一考察

張　　忠　任
陳　　幼　竹

はじめに

江戸時代の『塵劫記』（じんこうき）に記載された油分け問題（油分け算ともいう）は、油を与えられた容器だけを用いて等分するというパズル的問題であるが、現在文部科学省『高等学校学習指導要領』においても、数学史的な話題、数理的なゲームやパズルを取り上げ、数学と文化との関わりについての認識を深めるとともに、パズルなどに数学的な要素を見いだし、目的に応じて数学を活用して考察できるようにするため、とくに取り扱われている[1)]。

また、油分け問題は、日本文化として近年注目が集まっている和算（わさん）の典型問題の一つである。油分け問題に類似するパズルは、1995年の海外映画ダイハードⅢ（Die Hard Ⅲ）にもスリリングなプロットの１つとして登場したこともある。

この油分け問題は、『塵劫記』以前の日本の文献や中国の文献には見当たらないが、西洋では古くからあるため、キリスト教の宣教師が伝えた可能性もあると思われている[2)]。

油分け問題に関する解法はますます進化してきているが、方法が複雑化するにつれて、機械的操作になってしまう傾向が見られる。よって、頭を鍛えるという数学の効果が弱くなっていることが分かる。

本稿は、Singmaster（2004）が提示した手がかりを参考に、ネット上の膨大なデジタル資料を利用して、日本、中国および西洋の古文献で油分け問題の源を確かめ、その価値について遡って考え、『塵劫記』を中国と西洋との接点から東西における文化交流の一角として考察する。本稿も、油分け問題そのものを数学的立場から検討し、従来の解法を分析した上で、和算の精神に似合う新解法を提示して、数学の文化的価値を強調したい。

１．油分け問題の由来

日本では、油分け問題は、吉田光由（1598～1672）の『塵劫記』に初出したと知られて

いるが、寛永４年（1627年）に発行された『塵劫記』初版本ではなくて、寛永６年（1629年）ごろの五巻本にはじめて著わされたと指摘されている[3)]。

『塵劫記』五巻本の第五巻における第40条で油分け問題が述べられている。そのタイトルは「あぶらハかりわけてとる事」（あぶら量り分けて取る事）であって、問題文は以下のとおりである[4)]。

「**あぶら一斗あるを七升ますと三升ますと二つにて五升づつはかりわけたき**」（油一斗あるものを、七升ますと三升ますと二つで、五升づつに量り分けたい）

この油分け問題文における斗と升は、中国に起源があると思われる尺貫法の体積の単位である[5)]。升の大きさは時代や地域によって大きく異なる[6)]が、升と斗との関係はほとんど古代から変わっておらず、１斗＝10升（升は斗の10分の１となること）である。なお、ここでの「ます」（枡）とは、体積を計量するための測定器として、「升」、「斗」などを量るために利用される容器である。

油分け問題は、古代中国からの体積単位を使っているため、中国の文化との接点があることが分かる。

『塵劫記』に中国と接点があることについても、多くの先行研究がふれている。とくに、中国から伝えられた書物が『塵劫記』の数学のもとになったことは通説となっているようであるが、結論は多岐にわたっている。ただし、『盤珠算法』、『数学通軌』、『算法指南』[7)]が『塵劫記』の初版本の種本となる見解[8)]に対して、『算学啓蒙』、『算法統宗』[9)]などとのつながりを強調するような観点が増えている[10)]。とくに、『算法統宗』について、吉田光由は角倉素庵から学んでいるような結論がある[11)]。

王青翔（1987）などで指摘されたように、『塵劫記』は中算書[12)]と完全に重なっておらず、中算書の範囲を越えるものもある。ただし、中算書では、数学遊戯問題をいろいろ記載しているが、油分け問題および類似する問題はこれまでの研究では確認していないことが事実である[13)]。したがって、中算書の範囲外から求める必要がある。

このような考え方は、油分け問題がキリスト教の宣教師から伝えられた可能性があるという推測にも一致している。とくに、吉田光由がイタリアのイエズス会のカルロ･スピノラ宣教師に数学を学んだ事実の解明[14)]により、油分け問題はキリスト教の宣教師が伝えた可能性が高まっている。

また、油分け問題に類似する数学遊戯問題は、西洋では古くからあり、「スリージャグの問題」（Three Jug Problem）や「注水パズル」（Water pouring puzzle）と呼ばれている。

ところが、注水パズルならば、その範囲は「スリージャグ」に限らない。よって、Singmaster（2004）は、２種類に分けている。そのうち、$\mathrm{I}-(a,b,c)$ は、サイズがa、b、c の３つの容器があるとき、aが満杯で、bと cを使ってaを等分にしたい問題である。より一般的には、a、b、cが与えられたとき、dを配分（三等分とか）にしたい問題である。これを$\mathrm{II}-(a,b,c;d)$ で表す[15)]。本稿では、研究目的に限って、$\mathrm{I}-(a,b,c)$ のようなパズルのみ取り扱う。

『塵劫記』における油分け問題は、Singmasterの第Ⅰ種類の問題となる。Singmaster（2004）の考察によると、第Ⅰ種類の問題では、$\mathrm{I}-(8,5,3)$ のようなパズルがもっとも多く、そして歴史も長い。また、Singmasterの考察によると、はじめての$\mathrm{I}-(8,5,3)$ のパズルは、ドイツの修道院長、歴史家であったAlbert von Stade（c. 1187～c. 1260）による

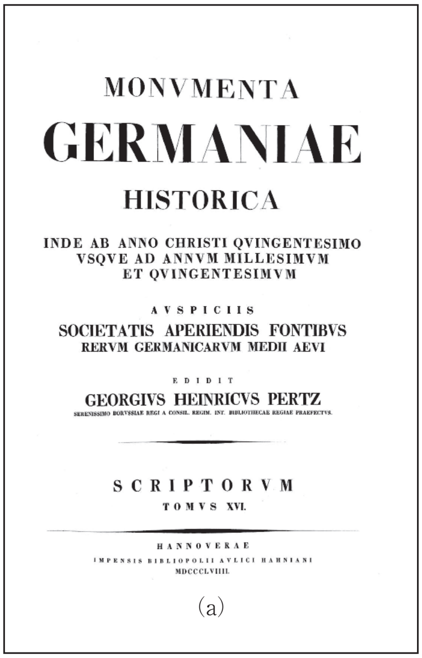
ものであり、1240年ごろラテン語で執筆したAnnales Stadenses[16]では、図１の（c）に見られるとおり、第333ページの50行より、ワイン分けについて物語のような形で、すでにⅠ－(8,5,3) のようなパズルを述べている[17]。とくに図１の（c）における表（右下）は解答過程をも明白に示している。

1500年前後、イタリアにおいて「スリージャグの問題」を載せた著作が現れてきた。それは、イタリアの数学者、修道士で、「簿記会計の父」と呼ばれているルカ・パチョーリ（Fra Luca Bartolomeo de Pacioli、1445～1517）が書いたDe Viribus Quantitatisという手稿[18]である。

この手稿の第53章でワインの二等分についての問題を述べている。それは２人の兄弟がどのようにして８ソム（量）のワインの樽を３ソムと５ソムの２つの小さな樽を用いて均等に分割するのかについてのパズルであった。そして第54章では、問題を広げて、Ⅰ－(12,7,5) のパズルも検討しており、さらに第55章では、Ⅰ－(10,6,4)のようなパズルは不可能な問題として検討し問題提起者を皮肉ったのであった[19]。

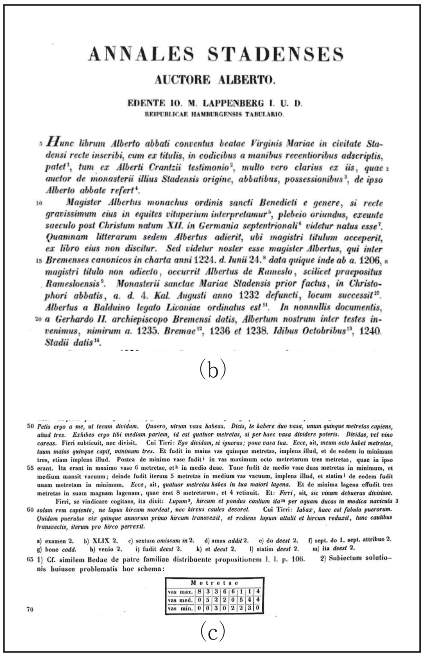
パチョーリの手稿の存在意義は、まず1500年前後のイタリアで「スリージャグの問題」はすでに知られていたことを示したことである。また、この手稿はⅠ－(8,5,3) のようなパターンに限らず、問題の範囲をⅠ－(12,7,5) のようなパターンへと広げ、さらに問題の条件（例えば、Ⅰ－(10,6,4)のようなものの不可能性など）まで検討するに至ることも重要である。

Singmaster（2004）では、イタリアではFrancesco Galigai（1498～1573）も、1521年の著書Practica D'Arithmeticaには、Ⅰ－(8,5,3) のパズルを述べたことがあるという手がかりをも提示している。その後、イタリアでは長年対立していたジェロラモ・カルダーノとニコ



MONVMENTA
GERMANIAE
HISTORICA
INDE AB ANNO CHRISTI QVINGENTESIMO
VSQVE AD ANNVM MILLESIMVM
ET QVINGENTESIMVM
AVSPICIIS
SOCIETATIS APERIENDIS FONTIBVS
RERVM GERMANICARVM MEDII AEVI
EDIDIT
GEORGIVS HEINRICVS PERTZ
SERENISSIMO BORVSSIAE REGI A CONSIL. REGIM. INT. BIBLIOTHECAE REGIAE PRAEFECTVS.
SCRIPTORVM
TOMVS XVI.
HANNOVERAE
IMPENSIS BIBLIOPOLII AVLICI HAHNIANI
MDCCCLVIIII.

（a）



ANNALES STADENSES
AUCTORE ALBERTO.
EDENTE IO. M. LAPPENBERG I. U. D.
REIPUBLICAE HAMBURGENSIS TABULARIO.

Hunc librum Alberto abbati conventus beatae Virginis Mariae in civitate Stadensi recte inscribi, cum ex titulis, in codicibus a manibus recentioribus adscriptis, patet[1], *tum ex Alberti Crantzii testimonio*[2], *multo vero clarius ex iis, quae auctor de monasterii illius Stadensis origine, abbatibus, possessionibus*[3], *de ipso Alberto abbate refert*[4].

Magister Albertus monachus ordinis sancti Benedicti e genere, si recte gravissimum eius in equites vituperium interpretamur[5], *plebeio oriundus, exeunte saeculo post Christum natum XII. in Germania septentrionali*[6] *videtur natus esse*[7]. *Quamnam litterarum sedem Albertus adierit, ubi magistri titulum acceperit, ex libro eius non discitur. Sed videtur noster esse magister Albertus, qui inter Bremenses canonicos in charta anni 1224. d. Iunii 24.*[8] *data quique inde ab a. 1206, magistri titulo non adiecto, occurrit Albertus de Rameslo, scilicet praepositus Ramesloensis*[9]. *Monasterii sanctae Mariae Stadensis prior factus, in Christophori abbatis, a. d. 4. Kal. Augusti anno 1232 defuncti, locum successit*[10]. *Albertus a Balduino legato Livoniae ordinatus est*[11]. *In nonnullis documentis, a Gerhardo II. archiepiscopo Bremensi datis, Albertum nostrum inter testes invenimus, nimirum a. 1235. Bremae*[12], *1236 et 1238. Idibus Octobribus*[13], *1240. Stadii datis*[14].

（b）

Petis ergo a me, ut tecum dividam. Quaero, utrum vasa habeas. Dicis, te habere duo vasa, unum quinque metretas capiens, aliud tres. Exhibeo ergo tibi mediam partem, id est quatuor metretas, si per haec vasa dividere poteris. Dividas, vel vino careas. Firri subticuit, nec divisit. Cui Tirri: *Ego dividam, si ignoras; pone vasa tua. Ecce,* ait, *meum octo habet metretas, tuum maius quinque capit, minimum tres.* Et fudit in maius vas quinque metretas, implens illud, et de eodem in minimum tres, etiam implens illud. Postea de minimo vase fudit[i] in vas maximum octo metretarum tres metretas, quae in ipso erant. Ita erant in maximo vase 6 metretae, et[k] in medio duae. Tunc fudit de medio vase duas metretas in minimum, et medium mansit vacuum; deinde fudit iterum 5 metretas in medium vas vacuum, implens illud, et statim[l] de eodem fudit unam metretam in minimum. *Ecce,* ait, *quatuor metretas habes in tua maiori lagena.* Et de minima lagena effudit tres metretas in suam magnam lagenam, quae erat 8 metretarum, et 4 retinuit. Et: *Firri,* ait, *sic vinum debueras divisisse.*

Firri, se vindicare cogitans, ita dixit: *Lupum*[3], *hircum et pondus caulium ita*[m] *per aquam ducas in modica navicula solam rem capiente, ne lupus hircum mordeat, nec hircus caules devoret.* Cui Tirri: *Iabax, haec est fabula puerorum. Quidam puerulus vix quinque annorum primo hircum transvexit, et rediens lupum attulit et hircum reduxit, tunc caulibus transvectis, iterum pro hirco perrexit.*

a) examen 2. b) XLIX 2. c) sextum *omissum in* 2. d) amas *addit* 2. e) do *deest* 2. f) sept. do 1. sept. attribuo 2. g) bone *codd.* h) venio 2. i) fudit *deest* 2. k) et *deest* 2. l) statim *deest* 2. m) ita *deest* 2.

1) Cf. similem Bedae de patre familiae distribuente propositionem l. l. p. 106. 2) Subiectum solutionis huiusce problematis hoc schema:

Metretae								
vas max.	8	3	3	6	6	1	1	4
vas med.	0	5	2	2	0	5	4	4
vas min.	0	0	3	0	2	2	3	0

（c）

図１　MGHの裏表紙とAlbertの問題文

出典：Albert von Stade. Annales Stadenses. http://daten.digitale-sammlungen.de/~db/bsb00000943/images/index.html（アクセス日2021年８月23日）

ロ・フォンタナ・“タルタリア”[20] も、Ⅰ－(8,5,3) のような「スリージャグの問題」をそれぞれ述べていた。

カルダーノは1539年にミラノ（Milano）で出版した著書（Practica arithmetice et mensurandi singularis）第66章第33節でⅠ－(8,5,3) のパズルを述べて、別の解法も示している[21]。

タルタリアの1556年の著書『数と測定に関する一般的な論説』（General Trattato di Numeri et Misure）にもⅠ－(8,5,3) のパズルが載っている[22]。

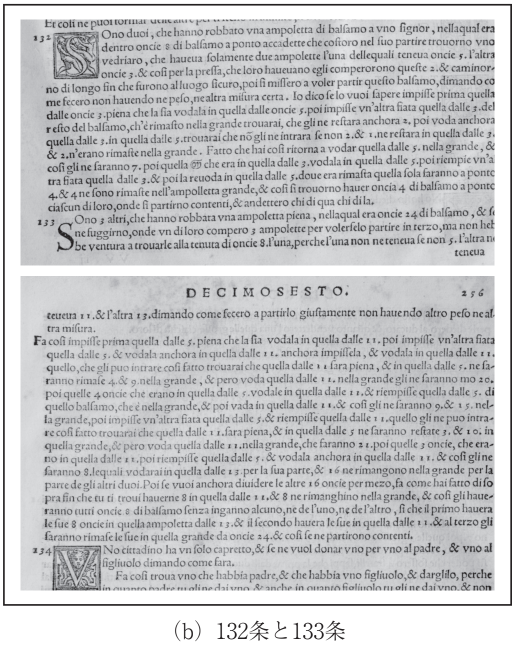
この著書（図２（a）参照）は全Ⅵ部で、VeniceのCurtio Troianoにより、1556～1560年の間に出版されたものである。油分け問題を検討したのはその第Ⅰ部の132条である[23]。

タルタリア（1556）が第Ⅰ部132条で書いた問題文は下記のように述べている。２人は隣から８オンス（イタリア語：oncie）のバルサム（イタリア語：balsamo）が入ったアンプル（イタリア語：ampolette）を盗んだ。帰りには、たまたま５オンスと３オンスのアンプルを入手した。よって５オンスと３オンスのアンプルを用いて８オンスのバルサムを等分する方法を考えたのである[24]（図２（b）参照）。

タータグリア（1556）のパズルは、「８オンスのバルサムを、５オンスと３オンスの瓶で等分する」という問題にまとめることができる。これは典型的なⅠ－(8,5,3) のパターンのパズルである。

つまり、遅くとも1500年ごろからカルロ･スピノラ宣教師の祖国イタリアでは、「スリージャグの問題」がすでに存在していた。カルロ･スピノラはこの問題を知っていた可能性が高いだろう。彼に数学を学んだ７歳の吉田光由は、遊びとしてもいつかカルロ･スピノラからこの問題を教えられた可能性もあるだろう。

（a）表紙



132 SOno duoi, che hanno robbato vna ampoletta di balſamo a vno ſignor, nellaqual era dentro oncie 8 di balſamo a ponto accadette che coſtoro nel ſuo partire trouorno vno vedriaro, che haueua ſolamente due ampolette l'una dellequali teneua oncie 5. l'altra oncie 3. & coſi per la preſſa, che loro haueuano egli comperorono queſte 2. & caminorno di longo fin che furono al luogo ſicuro, poi ſi miſſero a voler partir queſto balſamo, dimando come fecero non hauendo ne peſo, ne altra miſura certa. Io dico ſe lo vuoi ſapere impiſſe prima quella dalle oncie 3. piena che la ſia vodala in quella dalle oncie 5. poi impiſſe vn'altra fiata quella dalle 3. del reſto del balſamo, ch'è rimaſto nella grande trouarai, che gli ne reſtara anchora 2. poi voda anchora quella dalle 3. in quella dalle 5. trouarai che nõ gli ne intrara ſe non 2. & 1. ne reſtara in quella dalle 3. & 2. n'erano rimaſte nella grande. Fatto che hai coſi ritorna a vodar quella dalle 5. nella grande, & coſi gli ne faranno 7. poi quella vna che era in quella dalle 3. vodala in quella dalle 5. poi riempie vn'altra fiata quella dalle 3. & poi la reuoda in quella dalle 5. doue era rimaſta quella ſola faranno a ponto 4. & 4 ne ſono rimaſte nell'ampolletta grande, & coſi ſi trouorno hauer oncia 4 di balſamo a ponto ciaſcun di loro, onde ſi partirno contenti, & andettero chi di qua chi di la.

133 SOno 3 altri, che hanno robbata vna ampoletta piena, nellaqual era oncie 24 di balſamo, & ſe ne fuggirno, onde vn di loro compero 3 ampolette per volerſelo partire in terzo, ma non hebbe ventura a trouarle alla tenuta di oncie 8. l'una, perche l'una non ne teneua ſe non 5. l'altra ne teneua

DECIMOSESTO. 256

teneua 11. & l'altra 13. dimando come fecero a partirlo giuſtamente non hauendo altro peſo ne altra miſura.

Fa coſi impiſſe prima quella dalle 5. piena che la ſia vodala in quella dalle 11. poi impiſſe vn'altra fiata quella dalle 5. & vodala anchora in quella dalle 11. anchora impiſſela, & vodala in quella dalle 11. quello, che gli puo intrare coſi fatto trouarai che quella dalle 11 ſara piena, & in quella dalle 5. ne ſaranno rimaſe 4. & 9. nella grande, & pero voda quella dalle 11. nella grande gli ne ſaranno mo 20. poi quelle 4 oncie che erano in quella dalle 5. vodale in quella dalle 11. & riempiſſe quella dalle 5. di quello balſamo, che è nella grande, & poi vada in quella dalle 11. & coſi gli ne ſaranno 9. & 15. nella grande, poi impiſſe vn'altra fiata quella dalle 5. & riempiſſe quella dalle 11. quello gli ne puo intrare coſi fatto trouarai che quella dalle 11. ſara piena, & in quella dalle 5 ne ſaranno reſtate 3. & 10. in quella grande, & pero voda quella dalle 11. nella grande, che faranno 21. poi quelle 3 oncie, che erano in quella dalle 11. poi riempiſſe quella dalle 5. & vodala anchora in quella dalle 11. & coſi gli ne ſaranno 8. lequali vodarai in quella dalle 13. per la ſua parte, & 16 ne rimangono nella grande per la parte de gli altri duoi. Poi ſe vuoi anchora diuidere le altre 16 oncie per mezo, fa come hai fatto di ſopra fin che tu ti troui hauerne 8 in quella dalle 11. & 8 ne rimanghino nella grande, & coſi gli haueranno tutti oncie 8 di balſamo ſenza inganno alcuno, ne de l'uno, ne de l'altro, ſi che il primo hauera le ſue 8 oncie in quella ampoletta dalle 13. & il ſecondo hauera le ſue in quella dalle 11. & al terzo gli ſaranno rimaſe le ſue in quella grande da oncie 24. & coſi ſe ne partirono contenti.

134 VNo cittadino ha vn ſolo capretto, & ſe ne vuol donar vno per vno al padre, & vno al figliuolo dimando come fara.

Fa coſi troua vno che habbia padre, & che habbia vno figliuolo, & darglilo, perche in quanto padre tu gli ne dai vno, & anche in quanto figliuolo tu gli ne dai vno, & non

（b）132条と133条

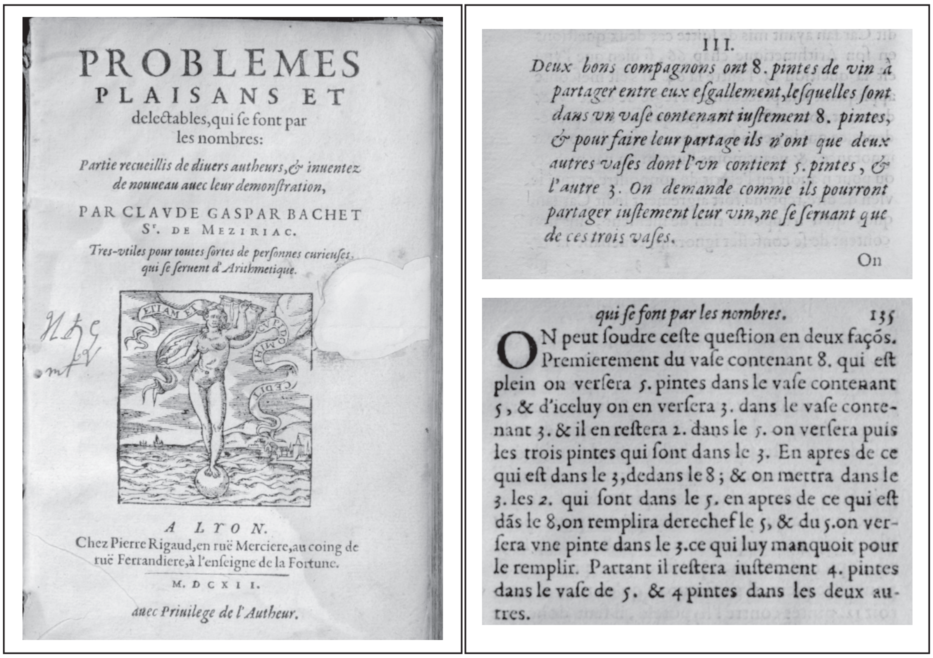
図２　タータグリア（1556）の表紙と問題文（イタリア語）

出典：Tartaglia, Niccolò, General Trattato di Numeri et Misure, Part I（Venice, 1556）より引用。（アクセス日2021年８月23日）

世界でよく知られるバシェー（Bachet）[25] の著書『数学遊戯問題集』（Problemes Plaisants et Delectables）が1612年に出版された。本書においても「スリージャグの問題」を載せている[26]。それは、仲の良い二人が８パイント（フランス語：pinte）のワインを分け合うパズルである。具体的にいえば、８パイントの花瓶（フランス語：vase）で作られたワインを二人で均等に分けるためには、ほかに２つの花瓶があり、そのうち１つは５パイント、もう１つは３パイントである。この３つの花瓶だけを使って、ワインを均等に分けることができるかと問われる。バシェーは２つの方法で解くことができると述べた。

ただし、バシェーの名著は影響力が高くても、カルロ･スピノラ宣教師はこの本が出版された1612年以前に来日し、数学を講義していた[27] ため、この本を参考にすることは不可能であったため、カルロ･スピノラを経由して吉田光由がバシェーの著書『数学遊戯問題集』を知ることは考えられないが[28]、別のルートから吉田光由がこの『数学遊戯問題集』で載せた「スリージャグの問題」を受け取った可能性がないとはいえないだろう。

ともあれ、「スリージャグの問題」は西洋でいくつかの国の間で伝わってきた。それが伝



PROBLEMES
PLAISANS ET
delectables, qui se font par
les nombres:
Partie recueillis de diuers autheurs, & inuentez
de nouueau auec leur demonstration,
PAR CLAVDE GASPAR BACHET
S^r. DE MEZIRIAC.
Tres-vtiles pour toutes sortes de personnes curieuses,
qui se seruent d'Arithmetique.

A LYON.
Chez Pierre Rigaud, en ruë Merciere, au coing de
ruë Ferrandiere, à l'enseigne de la Fortune.
M. DC XII.
auec Priuilege de l'Autheur.

III.
Deux bons compagnons ont 8. pintes de vin à partager entre eux esgallement, lesquelles sont dans vn vase contenant iustement 8. pintes, & pour faire leur partage ils n'ont que deux autres vases dont l'vn contient 5. pintes, & l'autre 3. On demande comme ils pourront partager iustement leur vin, ne se seruant que de ces trois vases.
On

qui se font par les nombres. 135
ON peut soudre ceste question en deux façõs. Premierement du vase contenant 8. qui est plein on versera 5. pintes dans le vase contenant 5, & d'iceluy on en versera 3. dans le vase contenant 3. & il en restera 2. dans le 5. on versera puis les trois pintes qui sont dans le 3. En apres de ce qui est dans le 3, dedans le 8; & on mettra dans le 3. les 2. qui sont dans le 5. en apres de ce qui est dãs le 8, on remplira derechef le 5, & du 5. on versera vne pinte dans le 3. ce qui luy manquoit pour le remplir. Partant il restera iustement 4. pintes dans le vase de 5. & 4 pintes dans les deux autres.

（a）裏表紙　　（b）問題Ⅲ

図３　バシェー（1612）の表紙と問題文（フランス語）
出典：https://www.loc.gov/resource/rbc0001.2009gen48833/（アクセス日2021年８月23日）

表１　代表的な「スリージャグの問題」と構成要素

年代	国	著者	言語	液体	単位	容器名	大容器量	中容器量	小容器量
1240	ドイツ	Albert	ラテン語	vinum	metretas	vasa	8	5	3
1500	イタリア	Tartaglia	イタリア語	balsamo	oncie	ampolette	8	5	3
1612	フランス	Bachet	フランス語	vin	pinte	vase	8	5	3
1627	**日本**	**吉田光由**	**日本語**	**油**	**升（斗）**	**枡**	**10**	**7**	**3**

出典：著者作成。

わっているときに、不変になるのはその数学的中核とする $\mathrm{I}-(8,5,3)$ であるが、変わるのは、内容の表現のみに限り、表１に示したように、液体の変更（ワイン、バルサム、油など）、容器の変更（花瓶、アンプル、枡など）、単位の変更（ガロン、オンス、パイント、斗・升など）が見られる。このような現象を「スリージャグの問題」の本土化と呼べばよいだろう。

ただし、油分け問題を西洋から日本に伝わったものとすれば、「スリージャグの問題」の本土化としても、『塵劫記』では、その数学的中核も、$\mathrm{I}-(8,5,3)$ から $\mathrm{I}-(10,7,3)$ へと変わった。Singmaster（2004）では、$\mathrm{I}-(8,5,3)$ と異なる「スリージャグの問題」がいくつか挙げられているが[29]、吉田光由の $\mathrm{I}-(10,7,3)$ は唯一である。そのため、吉田光由が「スリージャグの問題」を独自の発想で発展させたことが考えられる。

つまり、油分け問題には、三つの文化（日本、中国および西洋）の融合になる痕跡があるといえよう。

２. 一次不定方程式による解法の形成

AlbertのAnnales Stadensesから吉田光由の『塵劫記』まで、「スリージャグの問題」についてすべて解答（１つや２つ）を与えているが、３つの容器の間でどのように液体を移すかの手順を示したものだけであって、厳密にいえば解法とはいえない。

アメリカの数学者Cowley（1874～1945）は、はじめて線形ディオファントス方程式（Linear Diophantine equation）[30] を用いて、バシェーの $\mathrm{I}-(8,5,3)$ の問題を $\mathrm{I}-(A,B,C)$ に一般化して、とくに $A=B+C$ の場合、$\mathrm{m}B-nC=A/2$ というような線形ディオファントス方程式が得られ、そしてグラフ分析の手法で、解法を与えている[31]。ただし、**彼女は、いわゆるユークリッドの互除法（Euclidean Algorithm）[32] で線形ディオファントス方程式を解く方法を知らなかった**ようである。

ユークリッドの互除法で線形ディオファントス方程式の特例（ $ax-by=1$ のパターン）を解く方法は、バシェー『数学遊戯問題集』（改訂増補版、1624）によりすでに与えられていた[33]。ただし、**バシェーは、この方法を「スリージャグの問題」の解答に利用していなかった。**その後、ベズーは、「ベズーの補題」（Bézout’s lemma）とも呼ばれるベズーの等式（Bézout’s identity）を証明して、方法を一般化して、すなわち２つよりも多い整数に対して拡張した。よって、現在、線形ディオファントス方程式をベズー方程式と呼ぶことが多い。

それでは、ベズー方程式の解き方を説明しておこう。

a と b を 0 でない整数とし、d をそれらの最大公約数とすると、一般的なベズー方程式は、$ax+by=d$ と表示できる。

このとき、x と y は (a,b) のベズー係数（Bézout coefficients）と呼ばれる。それらは一意的ではない。

ベズー係数を求めるとき、２つの自然数の最大公約数を求める手法の一つとしてのユークリッドの互除法を用いて特解（特殊解）を求めてから一般解を導く手順がよく利用される。

その特解は、ベズーの補題によって、$ax+by=1$ から求められる。

一般的には、$r_0=a$、$r_1=b$ において、拡張されたユークリッドの互除法の各過程

としての $r_t = k_t r_{t+1} + r_{t+2}$ を繰り返して、$r_{s-2} = k_{s-2} r_{s-1} + 0$（$r_s = 0$）になるとき、ベズー係数の特解 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ が得られる。そのため、まず、ベズーの補題によって、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} = \prod_{t=0}^{s} \begin{pmatrix} k_t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{s-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

となることが分かる。$\mathbf{M}_t = \begin{pmatrix} k_t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすれば、$\mathbf{M}_t^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k_t \end{pmatrix}$ になることが分かる。また、

$$\left[\prod_{t=0}^{s} \begin{pmatrix} k_t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}$$

とすれば、

$$\begin{pmatrix} r_{s-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \left[\prod_{t=0}^{s} \begin{pmatrix} k_t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \left[\prod_{t=0}^{s} \begin{pmatrix} k_t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

が得られる。このとき、ベズー係数の特解は

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 a \\ m_2 b \end{pmatrix}$$

となる（$ax_0 + by_0 = 1$）。

なお、$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx_0 \\ dy_0 \end{pmatrix}$ は、$a\,x + b\,y = d$ の特解となる[34)]。

次に、特解から一般解 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + nb \\ y_1 - na \end{pmatrix}$ を導くことができる[35)]。

従来、この一般解をどのように利用して３つの容器の間における必要な移し替え手順を導くかについての説明は不十分であった。本稿は、このような手順を明らかにするため、基準値の概念を導入して計算過程の明白化を図る。

そのため、３つの容器を大きさの順で、それぞれ大＝H（容量 h）、中＝A（容量 a）、小＝B（容量 b）とする。また、$0 < b < a < h$ かつ $\gcd(a, b) = 1$ という条件を明記する。このとき、以下の式

$$f(n) = |x_1 + nb| + |y_1 - na|$$

を考えよう。もし

$$(x_1 + nb)(y_1 - na) < 0$$

となるとき、$x_1 + nb > 0, y_1 - na < 0$ となるならば、

$$f_A(n) = x_1 + nb - y_1 + na = x_1 - y_1 + (a + b)n \geq 0$$

になる。よって、$n_1 \geq \frac{y_1 - x_1}{a+b}$ の整数が解となる。

基準値 $\delta = \frac{y_1 - x_1}{a+b}$ と定義しておく。

もし、$x_1 + nb < 0$，$y_1 - na > 0$ となるならば、

$$f_B(n) = -(x_1 + nb) + y_1 - na = -f_A(n) \geq 0$$

になる。よって、$n_2 \leq \frac{y_1 - x_1}{a+b} = \delta$ の整数が解となる。

つまり、基準値 $\delta = \frac{y_1 - x_1}{a+b}$ の両側の整数 n^* は、解の $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + n^* b \\ y_1 - n^* a \end{pmatrix}$ を導くことになる。

なお、$x^* > 0$ であれば、x^* はHからAへ移す回数を示すのに対して、$x^* < 0$ であれば、x^* はAからHへ移す回数を示すことになる。また、$y^* > 0$ であれば、y^* はHからBへ移す回数を示すのに対して、$y^* < 0$ であれば、y^* はBからHへ移す回数を示すことになる。AとBの間の移し替えは以上の移す過程にしたがって別に考える必要がある。

それでは、以上の方法を用いて、以下の例題を解いてみてみよう。

例題１　斗桶に10升の油が入っている。７升の枡（ます）と３升の枡の２つの枡を使って５升ずつに分けたい[36]。

【解答】

この問題は、ベズー方程式：$7x + 3y = 5$ で表すことができる。

まず、この方程式 $7x + 3y = 1$ を、ユークリッドの互除法を用いて、表２に見るとおり、(7,　3) の最大公約数を求める。

よって

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

から、**特解**

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

が得られる。したがって

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 \\ -2 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

となり、一般解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 3n \\ -10 - 7n \end{pmatrix}$$

が求められる。

そして、基準値 $\delta = \frac{y_1 - x_1}{a+b} = \frac{-10-5}{7+3} = -1.5$ となるため、(-1.5) の両側の整数は (-1) と (-2) より、解の $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ は以下のように求められる。

表２　ユークリッドの互除法の計算結果

No.	k	r	備考
0		7	a
1	2	3	b
2	3	1	
3		0	

出典：著者作成。

$n^* = -1$ のとき、解 $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ -10+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$n^* = -2$ のとき、解 $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-6 \\ -10+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

が得られる。

それでは、具体的な移し替え方をそれぞれ考えよう。

まず、$n^* = -1$のとき、解 $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ -10+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

ここで、$x^* = 2 > 0$ であるため、2はHからAへ移す回数を示している。また、$y^* = -3 < 0$ であるため、-3 はBからHへ移す回数を示している。BとHの間、Bを空けるためHへ３回移す必要があることが分かる。具体的な移し替え方は表３を参照されたい。

次に、$n^* = -2$ のとき、解 $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-6 \\ -10+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

ここで、$x^* = -1 < 0$ であるため、(-1) はAからHへ移す回数を示している。また、

表３　$n^* = -1$のときの移し替え方

操作	10升斗桶	７升枡	３升枡
０回目	10	0	0
１回目	3	7	0
２回目	3	4	3
３回目	6	4	0
４回目	6	1	3
５回目	9	1	0
６回目	9	0	1
７回目	2	7	1
８回目	2	5	3
９回目	5	5	0

出典：著者作成。

表４　$n^* = -2$のときの移し替え方

操作	10升斗桶	７升枡	３升枡
０回目	10	0	0
１回目	7	0	3
２回目	7	3	0
３回目	4	3	3
４回目	4	6	0
５回目	1	6	3
６回目	1	7	2
７回目	8	0	2
８回目	8	2	0
９回目	5	2	3
10回目	5	5	0

出典：著者作成。

$y^* = 4 > 0$ であるため、４はＨからＢへ移す回数を示している。ＡとＢの間、Ｂを空けるためＢからＡへ５回移す必要があることが分かる。具体的な移し替え方は表４を参照されたい。

以上、油分けの問題の２つの解答を与えている。

ただし、一次不定方程式で油分けの問題が解けるが、そのややこしさを強く感じさせられている。

３．グラフ解法の功罪

1939年に、イギリスの医学物理学者、統計学者Tweedie（1919～1996）は、グラフ分析の手法による解法を発表した。

Tweedieの問題文の邦訳：ある男は３つの容器を持っており、その容量はそれぞれ３、５、８パイントであった。最大のものには水をいっぱい入れている。彼は、これらの容器のみを使用して、水を等分することを望んでいる。これを行うために最も簡単な方法は何だろうか[37)]。

このパズルは明らかにイギリスにおける I − (8,5,3) の問題の本土化といえるが、解法には特徴がある。Tweedie（1939）の解法は、座標軸を活用したものである。図４（*a*）に示したように、横軸を５パイント、縦軸を５パイントにする。また、(x, y, z) は、３、５、８パイントの容器における水の量を表し、出発点＝原点を (0,0,8) とする。終点＝目的地は (0,4,4) の点である。

具体的な手順をいえば、まず (0,0,8) から (5,0,3) まで線を引く。これは、８パイントの容器より５パイントの水を５パイントの容器へ移したことになる。

次に、(5,0,3) から (2,3,3) まで線を引く。これは、５パイントの容器より３パイントの水を３パイントの容器へ移したことになる。このとき、５パイントの容器の残りは２パイントとなった。

第３に、(2,3,3) から真下の横軸まで線を引く。到達点は (2,0,6) で、３パイントの容器より３パイントの水を８パイントの容器へ移したことを意味する。

第４に、(2,0,6) から (0,2,6) まで線を引く。これは、５パイントの容器より２パイントの水を３パイントの容器へ移したことになる。

第５に、(0,2,6) から (5,2,1) まで線を引く。これは、８パイントの容器より５パイントの水を５パイントの容器へ移したことになる。

第６に、(5,2,1) から (4,3,1) まで線を引く。これは、５パイントの容器より１パイントの水を３パイントの容器へ移したことになる。

第７に、(4,3,1) から真下の横軸まで線を引く。終点＝目的地の (0,4,4) に到達する。

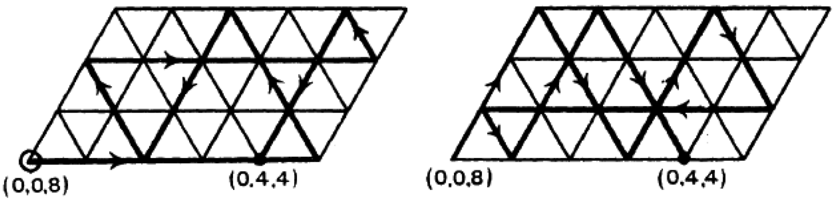
もし、図４（*b*）に示したように、第１ステップが、(0,0,8) から (0,3,5) に向かって出発すれば、また別の解（８回）が得られる。

Tweedie（1939）のグラフ解法を用いて、『塵劫記』の油分け問題を考えると、まず、原点の (0,0,10) から (7,0,3) まで線を引く。これは、１斗の枡より７升の水を７升の枡へ移したことになる。次に、(7,0,3) から (4,3,3) まで線を引く。これは、７升の枡より３升の水を３升の枡へ移したことになる。このような操作を繰り返していけば、９回目にゴールにな

る（図５参照）。もし、原点の (0,0,10) から (0,3,7) に向かって出発すれば、10回目に終点に到達する（この場合のグラフを省略）。

Tweedie（1939）のグラフ解法を発展させ、いわゆる三角グラフ（Ternary plot）[38] を用いて解くと、すこしやりやすくなるようである（図６参照）。

説明：HBは８パイントの容器に残る水の量、AHは５パイントの容器に残る水の量、BAは３パイントの容器に残る水の量を表す。原始状態では、B点の座標は(8, 0, 0)、H点の座標は(0, 0, 0)、A点の座標は(8, 0, 0)となる。平行四辺形▱BCDEは移動可能な範囲を示す



(*a*)　　　　(*b*)

図４　Tweedie（1939）のグラフ解法
出典：Tweedie（1939）より引用。

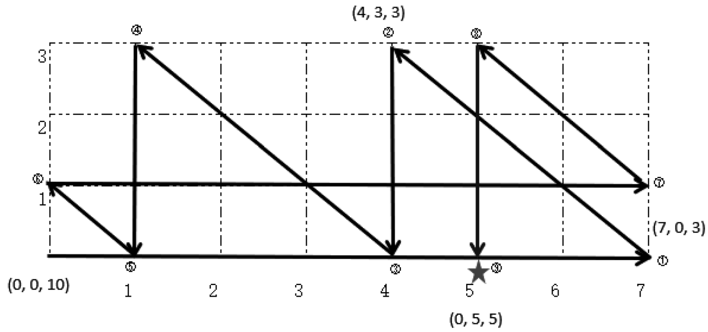


図５　『塵劫記』の油分け問題のグラフ解法
出典：著者作成。

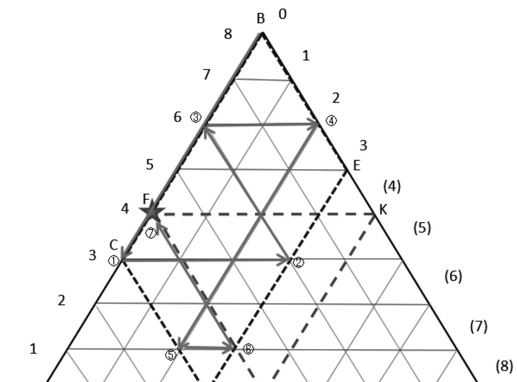


図６　Tweedie問題の三角グラフ解法
出典：著者作成。

（カッコを付けた数値は利用できないことを意味する）。三角形△FGKは解の範囲を示す。解を意味する点は３つあるが、G点とK点は▱BCDEの範囲外となるため、利用不能である。したがって、解となる点は、座標が $(4,4,0)$ のF点だけである。

具体的な手順：①B点の $(8,0,0)$ からC点の $(3,5,0)$ まで線を引く。②C点の $(3,5,0)$ から $(3,2,3)$ まで線を引く。このようにして、図６における矢印と番号にしたがって操作を繰り返していけば、７回目にゴールになる。もし、B点の $(8,0,0)$ からE点の $(5,0,3)$ に向かって出発すれば、８回目に終点に到達する（この場合のグラフを省略）。

ただし、グラフ解法は一次不定方程式より油分け問題を簡単に解くことができるが、機械的操作になる印象を強く感じさせる。

４．新解法：キー値法

以上の「スリージャグの問題」を、「３つの容器 ｛大＝H（容量 h）、中＝A（容量 a）、小＝B（容量 b）｝ を用いて、$0 < b < a < h$ かつ $\gcd(a,b)=1$ という条件の下で、容量 h を等分する」というように理論的にまとめておこう。

ヒントとなるグラフ解法の手順をもとに、グラフを使わなくても、以下の操作を繰り返せば問題を解決できるはずである。可能な手順は２つあるため、

最適ルート：大＝Hから中＝Aへ操作をスタートする手順

次適ルート：大＝Hから小＝Bへ操作をスタートする手順

と定義しておく。それでは、２つのルートをそれぞれ検討しよう。

まず、最適ルートを行い、

（１）中＝Aが空であれば、大＝Hの液体を中＝Aに満たす。

（２）中＝Aに液体がいっぱいになったら、次の手順は状況を見て決める。もし、小＝Bがいっぱいでなければ、中＝Aの液体で小＝Bを満たす。もし、小＝Bがいっぱいであれば、それをすべて大＝Hに移してから、新たに（１）から行う。

以上の操作を繰り返せば終点に到達できる。

次に、次適ルートを行うならば、操作は最適ルートより１回多く、目的地に到達できる（省略）。

このように無味な手順を繰り返せば問題を解決できるが、数学力を高める効果も頭を鍛える効果もないだろう。油分け算は数学遊戯の問題として、頭の体操の役割もあるはずであるが、以上の解法はずれているといえる。この点をめぐってよく考えると、Singmaster（2004）の $\mathrm{I}-(8,5,3)$ 問題や吉田光由（1627）の $\mathrm{I}-(10,7,3)$ 問題のような「スリージャグの問題」には、$5+3=8$ や $7+3=10$ というような特徴があることに気づいている。この特徴は、一般的には $h=a+b$ で表すことができる。この特徴から和算に似合う解法を考えよう。

そのため、まず、$h=a+b$ の条件を満たす「スリージャグの問題」について、以下の表記法を新たに規定する。問題の条件を $a>b>0$；$a>\frac{h}{2}$; $c<\frac{h}{2}$; $\gcd(a,b)=1$; $h=a+b$ として、３つの容器 ｛大＝H（容量 h）、中＝A（容量 a）、小＝B（容量 b）｝ を用いて、容量 h を等分することを式

$$(h|a,b) \;\rightarrow\; \frac{h}{2}$$

で表す。そして、$h = a + b$の場合、等差の$a - \frac{h}{2} = \frac{h}{2} - b$となることに気づいたため、以下の補題を得られる。

補題：「スリージャグの問題」では、等差 $(a - \frac{h}{2} = \frac{h}{2} - c)$ が成立する必要十分条件は $h = a + b$ である。

証明：

もし、$(a - \frac{h}{2} = \frac{h}{2} - b)$ が成立するならば、

$$a + b = \frac{h}{2} + \frac{h}{2} = h$$

が得られる。

もし、$h = a + b$ が成立するならば、

$$h = \frac{h}{2} + \frac{h}{2} = a + b$$

が得られ、整理すると、

$$a - \frac{h}{2} = \frac{h}{2} - b$$

が得られる。　(Q.E.D.)

この等差をキー値$(\theta > 0)$と定義する。すなわち$\theta = a - \frac{h}{2} = \frac{h}{2} - b$となる。また、$h = a + b$の条件を満たす「スリージャグの問題」を等差型と呼ぼう。

キー値θの重要性は、$a - \theta = b + \theta = \frac{h}{2}$ のことにある。したがって、キー値θが分かると、問題を解決できる鍵ができたといえる。それは一次不定方程式のようなものであるが、暗算ですぐ分かるはずである。コツとしては、$a > b$なので、以下のようにbの倍数（とくにa/bは参考になる）から試作すれば、

$$a - 2b$$
$$2a - 3b$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

通常は３回以内で、$x^{*}a - y^{*}b = \theta$を満たすx^{*}とy^{*}が求められる。

ただし、$\theta > 1$の場合、$x^{*}a - y^{*}b = -1$が得られたとき、$\theta(x^{*}a - y^{*}b) = -\theta$なので、$x^{*}a - y^{*}b = -1$についての同じ操作を$\theta$回繰り返せば問題が解決できる。

x^{*}とy^{*}の役割については、もし操作はHからAへスタートすれば、$b + \theta$は操作不能になる（Bの容量はb）ため、$xa - yb = -\theta$を満たすx、yを考えることになる。

ただし、この$-\theta$はAにとってのものである。それは、Bの中の量は$b - \theta$になるときしか実現できない（Bの中で、$b - \theta$の水が残ったとき、AからBへθだけを移せるため、Aからθだけ減ることになる）。このように相対的にAとBの関係を検討する方法は、いわゆる弁証法（Dialectic）の考え方である。

x^{*}はHからAへいっぱい移す必要回数を示す。y^{*}はBに入れる回数であるが、$\frac{a}{b} < 2$とすれば、表５のようになる。

表５　y^*の意味

回数	１回目	２回目	……	y^*-1回目	y^*回目
入れ量	b	b	b	b	$a-b$

出典：著者作成。

このようにして、BからHへ移す回数は（y^*-1）となることが分かる[39]。

AからBへ移す回数については、まず１回目のaをAからBへ移す回数を考える必要がある。それはいわゆる天井関数で求めた $[a/b]$ で決める[40]。

$x^*>1$の場合を検討するため、１回目のaをAからBへ移して、その最終回の残り（例えば、$a-b$とか）をb_1としておく[41]。$2<\frac{a}{b}<3$とすれば、aをAからBへ移す回数は、$[a/b]+1$になるため、下表のようになる。

表６　AからBへの移し回数

回数	１回目	２回目	３回目	５回目	６回目	７回目	……
入れ量	b	b	$b_1=a-b$	b	b	$b_2=a-b$	……

出典：著者作成。

このようにして、キー値θがBに出てきたら、目的地までの手順はあと３回のみになる[42]。

もし、われわれの操作がHからBへスタートするならば、$b+\theta$を考える立場に変わる必要があるが、後の操作は上記に類似する。

この解法を**キー値法**と呼ぼう。

それでは、キー値法を用いて、例題１を新たに解いてみよう。この場合、

$$\theta=7-\frac{10}{2}=\frac{10}{2}-3=2$$

であるため、$7x-3y$を考えると、

$$7-3\times3=-2$$

になることが分かる。したがって、HからAへ１回移し、AからBへ３回で移し（３回目は１升の油だけを移した）、$-2<0$なので、BからHへ２回移すと、Bの中の油は１升になる（これはAにとっては－２を意味する）。その上、３回の操作で$(5,5,0)$の目的を達成する。すべての操作は、計$1+3+2+3=9$回である。

次に、キー値法を用いて複雑な例題を解いてみよう。

例題２　18ℓの石油缶に灯油が満たされている。これをもとの石油缶と更に11ℓ入り、７ℓ入りの２つの石油缶を用いて丁度半分ずつにしたい。移し替えの手順が何回か[43]。

【解答】

この場合、キー値$\theta=11-\frac{18}{2}=\frac{18}{2}-7=2$であるため、$7x-3y$を考えると、暗算ですぐ

$$2\times11-3\times7=1$$

が得られる。また、$\theta = 2$なので、 $2 \times [2 \times 11 - 3 \times 7] = 2$を行う必要になる。

したがって、まずＨからＡへ２回移し(2×11)、ＡからＢへ１回目の11を$(7+4)$で移したあと、Ｂの中に４ℓになった。したがって、ＡからＢへ２回目の11を移すとき、$(3+7+1)$に分けられなければならない。ＡからＢへ計$2 \times 11 = 22$を移したため、Ｂを３回いっぱいにさせ（ＢからＨへ３回戻したことをも意味する）。つまり、Ｂの中の灯油を１ℓにするため、計$2+2+3+3=10$回の操作を行った。

続いて、$2 \times [2 \times 11 - 3 \times 7] = 2$になる手順を行う。ＨからＡへ移して、このとき、Ｂの中は１残っているため、ＡからＢへ移すとき、$(6+5)$に分けられなければならない。つまり、$(6+5)$の方法でＡからＢへ２回移すと、Ｂの中の灯油は５ℓになる。すなわちキー値を得ている。このため、計$1+2+1=4$回の操作を行った。

キー値が出てきたため、あと３回で終わる[44]。全部の操作は計17回であった。これは最適ルートである。次適ルートで行ったら18回になる。

最後に、1995年のダイハードⅢに登場したパズルにもキー値法が適用できることを見せたい。

このパズルは、制限時間内で解決しないと、爆発してしまうというbomber's deadly gameであった。ただし、それは、油分け問題とちょっと異なって、ジャグは２つしかなく、５ガロンのジャグ（A）と３ガロンのジャグ（B）であった。この２つのジャグを使ってジャグの中を４ガロンにしてから、爆発物の上に乗せれば爆発が解除されるとのことであった。なお、水源はあって利用には制限がないとされている。

このパズルに容器は２つしかないが、$5-4=4-3=1$となるため、暗算ですぐ

$$1 \times 5 - 2 \times 3 = -1$$

になることが分かる。したがって、①Aに水をいっぱい入れる。②ＡからＢに水を移し、いっぱいにさせる。③Bの水を捨てて、空ける。④Aに残った２ガロンの水をＢに移す。Bの中の水は２ℓになり、キー値を達成している。これで、あと２回の操作でAの中の水が４ガロンになる[45]。なお、Bからスタートしてもよいが省略する。

ともあれ、キー値法があると、油分け問題の計算は簡単になり、いつか数独より活躍される可能性もあるだろう[46]。

おわりに

本稿は歴史的視角から、国際的舞台で油分け問題を考察した。

Singmaster（2004）が提示した手がかりを参考に、ネット上の膨大なデジタル資料を利用して、日本、中国および西洋の古文献を調べて、日本と中国にはなくて、1240年頃にドイツで油分け問題の源となるものがはじめて出てきたことや、1500年以降イタリアなどの国で流行ってきたことが確認できた。

また、吉田光由は、角倉素庵から中国の数学書『算法統宗』を学び、イタリア宣教師カルロ·スピノラの数学を受講したこともあり、数学について中国と西洋の影響を受けたことが分かった。また、問題文は、古代中国からの体積単位を用い、西洋の「スリージャグの問題」の形式を使い、吉田光由自身の発想も組み入れているため、三つの数学文化の融合を示していることが分かった。

本稿も、油分け問題そのものを数学的立場から検討し、その解法はますます進化してい

るが、機械的操作になってしまう傾向があるため、頭を鍛えるという数学の効果が弱くなっていることを指摘した。そのため、本稿では数学の文化的価値を念頭に置き、和算の精神に似合う新解法＝キー値法を提示した。よって、油分け問題の解答は、心または知恵の運用へ回帰し、方程式もグラフも不要で、暗算だけで解ける問題となる。このようにして、もともと数独より面白さが濃い油分け問題は、頭の体操のように活用されることも期待できるだろう。

注

１）具体的にいえば、文部科学省（2018）第２章各科目第４節数学Ａの３「内容と内容の取扱い」における（3)「数学と人間の活動」で取り扱われている。

２）高木茂男『パズル遊びへの招待・オンライン版』はこの点にふれている。

３）佐藤健一（2006)、243頁。ただし、鈴木武雄（2019）は、五巻本を謎として疑っている。

４）中央教育研究所（2011）より引用。後の全文「あぶら一斗あるを七升ますと三升ますと二つにて五升づつはかりわけたきといふ時先三升のますにて七升ますに三ばい入申候時三升ますに二升のこり申し候時七升ますのを斗をけへあけて三升ますに弐升有を七升ますに入て又三升にて一はい入は五升づつにはかり申し候なり」（現代語訳：油一斗あるものを、七升ますと三升ますと二つで、五升づつに量り分けたいと言う時に、先ず三升ますで七升ますへ三杯汲んで入れれば、三升ますに二升残る。この時に七升ますに入っている油を一斗のおけにあけて、この二升を七升ますに入れる。三升ますで一杯汲めば、五升ずつと成る。）

５）尺貫法は、明治以降メートル法と併用されていたが、昭和34年（1959）より原則として廃止され、昭和41年（1966）以後メートル法に統一されたという。

６）日本で升が現在の大きさ（1.80391リットルにあたるもの）になったのは江戸時代のことである。

７）1573年に出版された『盤珠算法』は『新刻訂正家伝秘訣盤珠算士民利用』（全２巻）の略で、明の徐心魯の著書である。『数学通軌』は明の柯尚遷の著書であるが、1578年に出版された『曲礼外集』に「補学礼六芸付録」として所収されたものである。『算法指南』は1604年に出版された『新鐫易明捷径算法指南』（全２巻）の略で、明の黄竜吟の著書である。

８）鈴木（1986）は、「現在に伝わらないものがあったかも知れないが、現存本に限って云えば塵劫記の初版本の種本は盤珠算法、数学通軌、算法指南であり、他は室町以来の伝統数学によっていると結論づける者である」と述べている。

９）『算学啓蒙』３巻は元の朱世傑（生没年不詳）が1299年に著したものである。『算法統宗』（正題：新編直指算法統宗）17巻は、明の程大位（1533～1606）の著書であり、1592年に出版された。

10）例えば、王青翔（1987）は『塵劫記』と『算法統宗』との比較を中心に考察している。竹之内脩（2001）は『算学啓蒙』、『算法統宗』を『塵劫記』の数学のもとになったものとして検討している。

11）上野健爾「『塵劫記』と吉田光由（誌上市民講演会)」『数学通信』25（4)、2021年。

12）和算書に対して、中算書は古代中国の数学書を指す。

13）中国では、漢の韓信による油分け問題（「韓信走馬分油」や「韓信分油」という）が伝説として民間で流れているが、文献で確認できるのは、早くとも『今日農村』1998年第２号の物語コーナーで「小故事」（著者名なし）として掲載したものである。その後、李北西（2004）がある。どちらでも出典がなかった。

14）堀口俊二（2008）は、イタリアのイエズス会の宣教師であるカルロ･スピノラ（Carlo Spinola,

1564～1622）は1604年（慶長９）から1611年（慶長16）にかけて京都の天主堂で７年間説教の傍ら天文数学の講義を行っていた。７歳の吉田光由が外祖父の吉田素庵に連れられて講義を受けたと指摘している。

15）佐藤健一（2006）によれば、藤岡茂元『算元記』（1657）では、「三斗二升桶の油を一斗枡三個と七升枡一個をつかって八升ずつに分ける問題」を載せている。このような問題もSingmaster（2004）の分類に含まれていないことが分かる。したがって、Singmaster（2004）の分類はまだ不完全だと考えられる。

16）モヌメンタ・ゲルマニアエ・ヒストリカ（Monumenta Germaniae Historica＝MGH）XVIに所収。図（a）はMGH（XVI）の裏表紙で、図（b）はAnnales Stadensesに関する説明である。

17）Albertは、ラテン語で物語のように述べた内容：ある船の中で、フィリ（Firri）は、８ガロン（metretas）のワイン（vinum）を持つ。ティリ（Tirri）から半分もらいたいと頼んだ。「船があるか」とティリが聞くと、フィリは２つの花瓶（vasa）を持っていると答え、１つは５ガロン、もう１つは３ガロンであった。ただし、フィリもティリも分け方を知らなかった。誰かの手伝いで２つの花瓶を用いて、８ガロンのワインをうまく等分したとのことであった。

18）この手稿は現代の魔法と数字のパズルの基礎と評されるが、中世に少数の学者しか知らずに、ボローニャ大学のアーカイブに保管されていた。数学者のデビッド・シングマスター（David Singmaster, 1938～）に偶然に発見された後、2007年に初めて英訳版が出版されたという。The Guardian（ガーディアン）は、イギリスの大手一般新聞である。また、この手稿はイタリアのアボカミュージアム（Aboca Museum）によって2009年に公開されている。

19）イタリア語の原文：Et alo Idiota proposto sa fatigara in uano cercando lo impossibile。また、以上の内容はHirth（2015）を参照。

20）ジェロラモ・カルダーノ（Gerolamo Cardano、1501～1576）は、イタリアの数学者として知られているが、医者、占星術師、哲学者でもあった。ニコロ・フォンタナ・“タルタリア”（Niccolò Fontana“Tartaglia”、1499年または1500年～1557年）はイタリアの数学者、工学者、測量士である。「タルタリア」（Tartaglia）は、イタリア語で「吃音者」のことを意味し、彼の渾名という。カルダーノとタルタリアとの対立は、三次方程式の解法発見をめぐって生じたそうである。タルタリアは、長らく秘蔵していた三次方程式の解法を「公表しない」との誓いの元でカルダーノに教えた。カルダーノは、これをもとに弟子のフェラーリと共に一般的な三次方程式の解法等の研究に取り組んだ。また、カルダーノは、著書『偉大なる術（アルス·マグナ＝Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus（conosciuta anche come Ars Magna), Nuremberg, 1545)』を出版し、三次方程式と四次方程式の解法を公表した。そのためにタルタリアは激怒し、カルダーノと長く論争することになったという。

https://it.wikipedia.org/wiki/Gerolamo_Cardanoまたはhttps://it.wikipedia.org/wiki/Niccol%C3%B2_Tartagliaaを参照。

21）Singmaster（2004）を参照。

22）下平（2011）第52頁および佐藤（2006）第244頁においても手掛かりとなる程度ふれている。

23）ただし、その133条で述べた問題は132条の問題の継続となるが、５オンス、11オンス、13オンスの瓶を用いて24オンスのバルサムを３等分する問題であって、『塵劫記』における油分け問題と違うパターンのパズルであるため、本稿は検討しないことにする。

24）Tartaglia, Niccolò, General Trattato di Numeri et Misure, Part I, Venice: Curtio Troiano, 1556, art.

132 & 133, pp. 255v-256r.

25）Claude Gaspard Bachet de Méziriac（1581～1638）は、フランスの数学者、詩人および言語学者である。

26）下平（2011）第52頁において手掛かりとなる程度ふれられているが、高木茂男『パズル遊びへの招待・オンライン版』、http://www.torito.jp/puzzles/puzzle_asobi.shtml（アクセス日2021年８月23日）では、バシェーの著した『数学遊戯問題集』（改訂増補版、1624）には、８パイントのワインを、５パイントと３パイントの容器で等分する問題が載っていると指摘したこともある。

27）カルロ･スピノラは、1599年にリスボンから日本に向かい、1602年に日本に到着して、1604から1611年までの７年間京都で天文数学を教えていたという。

28）それにしても、カルロ･スピノラはフランスから「スリージャグの問題」を知る可能性はないとはいえない。とくにSingmaster（2004）によると、遅くとも1559年にフランスではすでに「スリージャグの問題」を含める数学書（Johannes Buteo. Logistica, Lyon, 1559）が出版されたことがあるから。なお、Johannes Buteo（c. 1485-c. 1560）はフランスの数学者、論理学者である。

29）佐藤健一（2006）によると、武田真元『摘要算法』（1846）では、「一四升補の油を五升枡一個と三升枡一個を使って七升ずつ二ヶ所に分ける問題」を載せていることを指摘している。これは、$\mathrm{I}-(14{,}5{,}3)$のパターンとなり、新しい発展をも意味する。

30）ディオファントス（Diophantus of Alexandria、推定生年：200～214年、推定没年：284～298年）は、ローマ帝国時代の数学者である。彼の名著『算術』（Arithmetica）は、16世紀以降のヨーロッパにおける代数学発展に影響を深く与えたという。一般的には、ディオファントス方程式は、整係数多変数高次不定方程式を指すが、線形ディオファントス方程式は、一次のディオファントス方程式のことで、一次不定方程式（Indeterminate Equation）やベズー方程式（Bézout's Equation）ともいう。

31）Cowley（1926）を参照。

32）この方法は、ユークリッド『原論』（BC300年頃）第７巻で載せているという。

33）Bullynck（2009）を参照。

34）$ax_0 + by_0 = 1$から、$adx_0 + bdy_0 = d$が得られるため。

35）$ax + by = d$と$ax_1 + by_1 = d$を連立して解くと、$a(x - x_1) = b(y_1 - y)$が得られる。$\gcd(a, b) = 1$なので、$(x - x_1) = nb$、$(y_1 - y) = na$となることが分かる。

36）『塵劫記』の油分け問題を書き直したものである。

37）原文：A man has three vessels, whose capacities are 3, 5 and 8 pints respectively. The largest is full of water. He desires to divide this water into two equal parts by using these vessels only. What are the simplest ways of doing this? Tweedie（1939）を参照。

38）これもいわゆる重心プロット（Barycentric plot）であるが、同次座標系（Homogeneous Coordinates）に属する重心座標系（Barycentric coordinate system）、または三線座標系（Trilinear Coordinates）と思われることもある。

39）その$(y^* - 1)$回目では、Bに残ったものは$b - \theta < b$で、いっぱい状態ではないのでHへ移せないが、仮想的に移せば、それはbに足りないもの（$-\theta$）を移したことを意味する。また、この（$-\theta$）はAからBへ移す場合しか、$a - \theta = \frac{h}{2}$の意味にならない。

40）$\lceil x \rceil$とは、天井関数（Ceiling Function）の記号である。天井関数とは、実数xに対してx以上の最小の整数と定義されている（数式：$\lceil x \rceil = min\{n \in Z | x \leq n\}$）。例えば、$\lceil 1.057 \rceil = 2$となる。

41）とくに、$\frac{a}{b} < 2$ならば、$b_1 = a - b$となる。

42）①HからAへいっぱい移して、②AからBへ移し、Bをいっぱいにさせる。AからBへ移せる量はθだけであるため、このとき、Aの量は $a-\theta=\frac{h}{2}$ になる。③BからHへ移すと、Hの量も $\frac{h}{2}$ になる。

43）加賀博著『完全分析SPI問題集:過去のデータと最新情報から出題パターンがわかる』永岡書店2000年、第76頁より引用。

44）具体的な手順：①HからAへ11を移して、②AからBへ2を移し、Bをいっぱいにさせる。このとき、Aの量は$11-2=9$になる。③BからHへ移すと、Hの量も9になる。

45）①Aに水をいっぱい入れる。②AからBに水を移し、Bをいっぱいにさせるが、Bに2ガロンの水が残っているので、AからBに移した水は1ガロンだけである。よって、Aの中に残った水は$5-1=4$ガロンになる。

46）とくに、油分け問題の構成要素は、対象者、内容品、容器、単位からなるため、問題文に物語を入れ替えやすいだろう。

参考文献

上野健爾「『塵劫記』と吉田光由（誌上市民講演会）」『数学通信』25（4）、2021年、6-12、https://www.mathsoc.jp/assets/file/publications/tushin/2504/2504ueno.pdf

王 青翔「「算法統宗」と「塵劫記」の比較研究－比較数学史の試み－１」『数学史研究』（113）、1987年

王 青翔「「算法統宗」と「塵劫記」の比較研究－比較数学史の試み－２」『数学史研究』（114）、1987年

竹之内脩「塵劫記について（数学史の研究）」『数理解析研究所講究録』（1195）, 2001年

佐藤健一訳・校注『「塵劫記」初版本：影印、現代文字、そして現代語訳』（吉田光由著）研成社、2006年

下平和夫『日本人の数学－和算』講談社学術文庫、2011年

城地 茂、張 耀祖、張 浩、劉 伯文「東西の格子乗法から見た近世日本数学：中国の「写算」「鋪地錦」とNapier's bonesの日本伝来（数学史の研究）」『数理解析研究所講究録別冊』（B50）、2014年

鈴木武雄「『塵劫記』と書林板元（数学史の研究）」『数理解析研究所講究録別冊』（B73）、2019年、https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/244755/1/B73-06.pdf（アクセス日2021年８月23日）

鈴木久男「算法統宗と塵劫記－程大位逝世三八〇年記念講演論文（1）－」『国士舘大学政経論叢』61（2）、1986年

高木茂男『パズル遊びへの招待・オンライン版』、http://www.torito.jp/puzzles/puzzle_asobi.shtml（アクセス日2021年８月23日）

中央教育研究所［編］『小学校算数における和算の活用』（研究報告；No.74）中央教育研究所2011年、https://www.chu-ken.jp/pdf/kanko74.pdf（アクセス日2021年８月23日）

橋本由美子「和算を算数教育に取り入れる意義とその教材化－『塵劫記』等に焦点をあてて－」『浦和論叢』第43号、2010年

堀口俊二「和算における開平法のルーツ－ギリシャから日本まで」『新潟産業大学経済学部紀要』第35号、2008年

文部科学省『高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説　数学編 理数編』2018年７月、https://www.mext.go.jp/content/1407073_05_1_2.pdf（アクセス日2021年８月23日）

李 北西「韓信走馬分油的故事」『農業知識』第７号、2004年

Albert von Stade. Annales Stadenses. c1240. Ed. by J. M. Lappenberg. In: Monumenta Germaniae

Historica, ed. G. H. Pertz, Scriptorum t. XVI, Imp. Bibliopolii Aulici Hahniani, Hannover, 1859（= Hiersemann, Leipzig, 1925）, pp. 271-359. http://daten.digitale-sammlungen.de/~db/bsb00000943/images/index.html（アクセス日2021年８月23日）

Bachet de Méziriac, C. G.. Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres, Lyon, 1612, https://www.loc.gov/resource/rbc0001.2009gen48833/（アクセス日2021年８月23日）

Bachet de Méziriac, C. G.. Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres, Seconde édition, Lyon, 1624, https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt６k5818046p/（アクセス日2021年８月23日）

Bullynck, Maarten. Modular Arithmetics before C.F. Gauss.: Systematizations and discussions on remainder problems in 18th-century Germany.. Historia Mathematica, Elsevier, 2009, 36（1）

Cowley, Elizabeth B.（1926）. "Note on a Linear Diophantine Equation". Questions and Discussions. American Mathematical Monthly. 33（7）

Hirth, Tiago Wolfram Nunes dos Santos. Luca Pacioli and his 1500s Book De Viribus Quantitatis. Lisboa. Tese de Mestrado Universidade de Lisboa, 2015

Pacioli, Luca. De Viribus Quantitatis, Facsimile edition of the manuscript, Facsimile edition of the manuscript, published by Aboca Museum, 2009.

Singmaster, David. Sources in Recreational Mathematics: An Annotated Bibliography, 8th preliminary edition. South Bank University. 2004. https://www.puzzlemuseum.com/singma/singma6/SOURCES/singma-sources-edn8-2004-03-19.htm#_Toc69533865（アクセス日2021年８月23日）

Tartaglia Niccolò, General Trattato di Numeri et Misure, Part I（Venice, 1556）. https://books.google.com/books?id=a3FdAAAAcAAJ&pg=PP1#v=onepage&q&f=true（アクセス日2021年８月23日）

Tweedie, M. C. K. Graphical Method of Solving Tartaglian Measuring Puzzles, The Mathematical Gazette, Vol. 23, No. 255（Jul., 1939）

キーワード：和算、数学文化、数学遊戯、スリージャグ、パズル

（Zhang Zhongren, Chen Youzhu）